MATHEMATICS Proceedings A 91 (4), December 19, 1988

Ungleichungen für geometrische und arithmetische Mittelwerte

by Horst Alzer

Morsbacher Str. 10, 5220 Waldbröl, West Germany

Communicated by Prof. R. Tijdeman at the meeting of April 25, 1988

ZUSAMMENFASSUNG

Wir bezeichnen mit G_n und A_n (bzw. G'_n und A'_n) das ungewichtete geometrische und arithmetische Mittel der Zahlen $x_1,\dots,x_n$ (bzw. $1-x_1,\dots,1-x_n$), $x_i\in[0,1/2]$, $i=1,\dots,n$. Das Ziel dieser Note ist es, die beiden Differenzen

$$A_n/A'_n - G_n/G'_n \text{ und } (A_n-A'_n)-(G_n-G'_n)$$

bestmöglich nach oben und nach unten abzuschätzen. Wir werden die Gültigkeit der Ungleichungen

$$(*)\qquad 0\le A_n/A'_n - G_n/G'_n \le (n-1)/(n+1)$$

und

$$0\le (A_n-A'_n)-(G_n-G'_n)\le 2^{(1-n)/n}-1/n$$

für alle $x_i\in[0,1/2]$, $i=1,\dots,n$, nachweisen und zeigen, daß sich die angegebenen Schranken nicht verschärfen lassen. Bei der linken Seite von (*) handelt es sich um die bekannte Ungleichung von Ky Fan.

1. EINLEITUNG

Über die berühmte Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel sind in der Vergangenheit viele Artikel geschrieben worden, in denen sowohl neue Beweise als auch interessante Verallgemeinerungen und Verschärfungen vorgestellt wurden; siehe [4], [8], [13].

In dem im Jahre 1961 erschienenen Buch "Inequalities" von E.F. Beckenbach und R. Bellman [4, p. 5] ist das folgende — von Ky Fan entdeckte —

bemerkenswerte Gegenstück zur Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel erstmalig veröffentlicht worden:

Wenn mit G_n und A_n (bzw. G'_n und A'_n) das geometrische und das arithmetische Mittel der reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ (bzw. $1-x_1, \ldots, 1-x_n$) bezeichnet wird, i.e.

$$G_n = \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \text{ und } A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$(\text{bzw. } G'_n = \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{1/n} \text{ und } A'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1-x_i)),$$

dann gilt für alle $x_i \in [0, 1/2]$, $i = 1, \ldots, n$:

$$G_n/G'_n \leq A_n/A'_n, \tag{1.1}$$

wobei das Gleichheitszeichen in (1.1) genau dann gilt, wenn $x_1 = \cdots = x_n$.

Die Ungleichung von Ky Fan ist in den letzten Jahren zum Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden; neue Ergebnisse hierzu findet man in [1–3], [5–7], [9–12], [14–18].

Besonders beachtenswert ist eine Arbeit von W.-L. Wang und P.-F. Wang [18], in der unter anderem gezeigt wird, wie sich die Ungleichung

$$G_n \leq A_n, \; x_i > 0, \; i = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

aus (1.1) herleiten läßt.

Wenn wir die Ungleichung von Fan in der Form

$$0 \leq A_n/A'_n - G_n/G'_n$$

schreiben, dann liegt es nahe, nach einer oberen Schranke für die Differenz $A_n/A'_n - G_n/G'_n$ zu fragen. Im nächsten Abschnitt werden wir eine (von den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ unabhängige) Zahlenfolge (a_n) angeben, so daß für alle reellen Zahlen $x_i \in [0, 1/2]$, $i = 1, \ldots, n$, gilt:

$$0 \leq A_n/A'_n - G_n/G'_n \leq a_n. \tag{1.3}$$

Im letzten Teil dieser Note wollen wir die Frage beantworten, ob es zu den Ungleichungen (1.3) ein additives Gegenstück gibt. Wir werden eine (ebenfalls von $x_1, \ldots, x_n$ unabhängige) Zahlenfolge (b_n) angeben, so daß die Doppelungleichung

$$0 \leq (A_n - A'_n) - (G_n - G'_n) \leq b_n \tag{1.4}$$

für alle $x_i \in [0, 1/2]$, $i = 1, \ldots, n$, gültig ist.

Darüber hinaus zeigen wir, daß die in (1.3) und (1.4) angegebenen Schranken nicht verschärft werden können.

Insbesondere besagt (1.4):

$$G_n - G'_n \leq A_n - A'_n; \tag{1.5}$$

die beiden Differenzen $G_n - G'_n$ und $A_n - A'_n$ lassen sich also ebenso miteinander vergleichen wie die Quotienten G_n/G'_n und A_n/A'_n.

Die in diesem Abschnitt eingeführten Bezeichnungen behalten wir im Folgenden bei.

2. EINE OBERE SCHRANKE FÜR A_n/A'_n

Wir beginnen mit dem Beweis von

SATZ 1. Für alle reellen Zahlen $x_i \in [0, 1/2]$, $i = 1, \dots, n$, $(n \geq 2)$, gilt:

$$A_n/A'_n \leq G_n/G'_n + (n-1)/(n+1). \tag{2.1}$$

Das Gleichheitszeichen steht in (2.1) dann und nur dann, wenn genau einer der Werte $x_1, \dots, x_n$ gleich 0 ist und alle anderen Werte gleich 1/2 sind.

BEWEIS. Wir definieren:

$$f\colon [0, 1/2]^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i) - \prod_{i=1}^{n} (x_i/(1-x_i))^{1/n}.$$

Die Funktion f ist auf einer kompakten Menge definiert und dort stetig; sie besitzt daher Minimum und Maximum. Unser Ziel ist es, das absolute Maximum von f zu berechnen.

Wenn f im Punkte $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $0 < a_i < 1/2$, $i = 1, \dots, n$, einen Extremwert annimmt, dann gilt:

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

und folglich wird die quadratische Gleichung

$$P(x) = x(1-x) - (A'_n)^2 G_n/G'_n = 0$$

von den Werten $a_1, \dots, a_n$ gelöst.

Einerseits gilt

$$P(0) = -(A'_n)^2 G_n/G'_n < 0$$

und andererseits folgt nach (1.1):

$$\begin{aligned} P(1/2) &= 1/4 - (A'_n)^2 G_n/G'_n \\ &\geq 1/4 - A'_n A_n \\ &= 1/4 - (1 - A_n) A_n \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Wenn $P(1/2) = 0$, dann gilt $A_n = 1/2$, also $a_1 = \cdots = a_n = 1/2$; dies widerspricht der Voraussetzung, daß a ein innerer Punkt der Menge $[0, 1/2]^n$ ist.

Folglich erhalten wir

$$P(1/2) > 0.$$

Also besitzt P im Intervall $(0, 1/2)$ genau eine Nullstelle und somit gilt

$$a_1 = \cdots = a_n.$$

Auf Grund der Abschätzung

$$f(a_1, \ldots, a_1) = 0 < (n-1)/(n+1) = f(0, 1/2, \ldots, 1/2)$$

folgt, daß die Funktion f ihr absolutes Maximum nicht im Innern annimmt.

Nun nehmen wir an, f habe im Randpunkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ein absolutes Maximum. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Keine Komponente von a ist gleich 0.

Dann sind l Komponenten von a gleich $1/2$ und auf Grund von $f(1/2, \ldots, 1/2) = 0$ folgt $1 \le l \le n-1$.

Ohne Einschränkung sei

$$a_{k+1} = \cdots = a_n = 1/2, \quad k = n - l,$$

dann erhalten wir für

$$g : [0, 1/2]^k \to \mathbb{R}$$
$$g(x_1, \ldots, x_k) = \Big[\sum_{i=1}^{k} x_i + 1/2\Big] \Big/ \Big[\sum_{i=1}^{k} (1 - x_i) + 1/2\Big] - \prod_{i=1}^{k} (x_i/(1-x_i))^{1/n}$$

die für alle $(x_1, \ldots, x_k) \in [0, 1/2]^k$ gültige Abschätzung

$$g(x_1, \ldots, x_k) \le g(a_1, \ldots, a_k). \tag{2.2}$$

Wegen $a_i \in (0, 1/2)$, $i = 1, \ldots, k$, folgt

$$\nabla g(a_1, \ldots, a_k) = 0$$

und somit genügen die Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ der quadratischen Gleichung

$$Q(x) = x(1-x) - (G_k/G_k')^{k/n}[1/2 + (1/2 - A_k)k/n]^2 = 0.$$

Es gilt

$$Q(0) < 0$$

und nach (1.1) folgt

$$\begin{aligned} Q(1/2) &= 1/4 - (G_k/G_k')^{k/n}[1/2 + (1/2 - A_k)k/n]^2 \\ &\ge 1/4 - (A_k/(1-A_k))^{k/n}[1/2 + (1/2 - A_k)k/n]^2 \\ &\ge 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $A_k = 1/2$.

Also gilt $Q(1/2) = 0$ genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_k = 1/2$; dies wiederspricht der Voraussetzung $a_i \in (0, 1/2)$, $i = 1, \ldots, k$. Somit gilt: $Q(1/2) > 0$; folglich verschwindet Q im Intervall $(0, 1/2)$ genau einmal und wir erhalten

$$a_1 = \cdots = a_k. \tag{2.3}$$

Wir bezeichnen mit $\tilde{g}$ die für $x \in [0, 1/2]$ definierte Funktion

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= g(x, \ldots, x)\\ &= (2kx+n-k)/(-2kx+n+k) - (x/(1-x))^{k/n}.\end{aligned}$$

Eine kleine Rechnung ergibt für $0 < x < 1/2$:

$$\frac{d}{dx}\,\tilde{g}(x) < 0.$$

Also folgt nach (2.3):

$$\tilde{g}(a_1) = g(a_1, \ldots, a_k) < g(0, \ldots, 0) = \tilde{g}(0);$$

dies steht im Widerspruch zur Ungleichung (2.2).

2. *Fall:* l Komponenten von a sind gleich 0 ($l \geq 1$).
Auf Grund von $f(0, \ldots, 0) = 0$ folgt: $1 \leq l \leq n-1$.
Ohne Einschränkung sei

$$a_{k+1} = \cdots = a_n = 0, \quad k = n - l.$$

Wir definieren:

$$h : [0, 1/2]^k \to \mathbb{R}$$

$$h(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i / [\sum_{i=1}^{k} (1-x_i) + n - k],$$

dann gilt für alle $(x_1, \ldots, x_k) \in [0, 1/2]^k$ die Abschätzung:

$$h(x_1, \ldots, x_k) \leq h(a_1, \ldots, a_k).$$

Da

$$h_{x_j}(x_1, \ldots, x_k) = n[\sum_{i=1}^{k} (1-x_i) + n - k]^{-2} > 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

nimmt h das absolute Maximum genau im Punkte $(1/2, \ldots, 1/2)$ an. Also gilt

$$a_1 = \cdots = a_k = 1/2$$

und wir erhalten

$$f(a_1, \ldots, a_n) = (n-l)/(n+l) \leq (n-1)/(n+1) = f(0, 1/2, \ldots, 1/2),$$

wobei in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen nur im Falle $l = 1$ steht.

Folglich nimmt die Funktion f ihr Maximum im Punkte a dann und nur dann an, wenn genau eine Komponente von a verschwindet und alle anderen Komponenten gleich 1/2 sind.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen. □

3. UNGLEICHUNGEN FÜR $(A_n - A'_n) - (G_n - G'_n)$

In den nachfolgenden Zeilen zeigen wir, wie sich die Differenz $(A_n - A'_n) - (G_n - G'_n)$ bestmöglich nach oben und nach unten abschätzen läßt. Mit Hilfe der zum Beweis von Satz 1 verwendeten Methode verifizieren wir das folgende Gegenstück zur Doppelungleichung (1.3):

SATZ 2. Für alle reellen Zahlen $x_i \in [0, 1/2]$, $i = 1, \dots, n$, $(n \geq 2)$, gilt:

$$G_n - G'_n \leq A_n - A'_n \leq G_n - G'_n + 2^{(1-n)/n} - 1/n. \tag{3.1}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in der linken Ungleichung von (3.1) genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n$ und in der rechten Ungleichung dann und nur dann, wenn genau einer der Werte $x_1, \dots, x_n$ gleich 0 ist und alle anderen Werte gleich $1/2$ sind.

BEWEIS. Wir werden das absolute Minimum und Maximum der Funktion

$$f\colon [0, 1/2]^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{1/n} - \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

berechnen.

Wenn f im Punkte $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $0 < a_i < 1/2$, $i = 1, \dots, n$, ein Extremum annimmt, dann folgt:

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß dann die Werte $a_1, \dots, a_n$ der quadratischen Gleichung

$$P(x) = xG'_n + (1 - x)G_n - 2x(1 - x) = 0$$

genügen.

Weiter gilt:

$$P(0) = G_n > 0$$

und

$$P(1/2) = 1/2(G'_n + G_n - 1) \leq 1/2(A'_n + A_n - 1) = 0.$$

Falls $P(1/2) = 0$, dann folgt $A_n = G_n$ und somit $a_1 = \cdots = a_n$. Wenn $P(1/2) < 0$, so hat P im Intervall $(0, 1/2)$ genau eine Nullstelle und folglich muß auch in diesem Falle gelten:

$$a_1 = \cdots = a_n.$$

Auf Grund von

$$f(a_1, \dots, a_1) = 1 < 2^{(1-n)/n} + (n - 1)/n = f(0, 1/2, \dots, 1/2)$$

besitzt f im Innern von $[0, 1/2]^n$ kein Maximum. Im Innern nimmt f höchstens in den Punkten $(a_1, \dots, a_1)$, $0 < a_1 < 1/2$, das Minimum an.

Im Folgenden nehmen wir an, f besitze in dem Randpunkt $a = (a_1, \dots, a_n)$ einen absoluten Extremwert.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Keine Komponente von a ist gleich 0.

Dann folgt, daß l Komponenten von a gleich $1/2$ sind; wir setzen $1 \leq l \leq n-1$ voraus.

Ohne Einschränkung sei

$$a_{k+1} = \cdots = a_n = 1/2, \quad k = n - l;$$

dann folgt, daß die Funktion

$$g : [0, 1/2]^k \to \mathbb{R}$$

$$g(x_1, \ldots, x_k) = 2^{-l/n}\left[\prod_{i=1}^{k} (1-x_i)^{1/n} - \prod_{i=1}^{k} x_i^{1/n}\right] + l/n + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

im Punkte $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ ein absolutes Extremum annimmt. Auf Grund von $a_i \in (0, 1/2)$, $i = 1, \ldots, k$, erhalten wir

$$\nabla g(a_1, \ldots, a_k) = 0.$$

Somit lösen die Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ die quadratische Gleichung

$$Q(x) = x(G_k')^{k/n} + (1-x)(G_k)^{k/n} - 2^{1+l/n} x(1-x) = 0.$$

Es gilt

$$Q(0) = (G_k)^{k/n} > 0$$

sowie

$$\begin{aligned} Q(1/2) &= 1/2[(G_k')^{k/n} + (G_k)^{k/n} - 2^{l/n}] \\ &\leq 1/2[(A_k')^{k/n} + (A_k)^{k/n} - 2^{l/n}] \\ &\leq 1/2[2^{-k/n} + 2^{-k/n} - 2^{l/n}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Falls $Q(1/2) = 0$, dann würde $G_k = A_k = 1/2$ und somit $a_1 = \cdots = a_k = 1/2$ folgen, was der Voraussetzung $a_i \in (0, 1/2)$, $i = 1, \ldots, k$, widerspricht. Also gilt $Q(1/2) < 0$, so daß Q in $(0, 1/2)$ genau einmal verschwindet und wir

$$a_1 = \cdots = a_k$$

erhalten.

Bezeichnen wir mit $\tilde{g}$ die im Intervall $[0, 1/2]$ definierte Funktion

$$\tilde{g}(x) = g(x, \ldots, x) = 2^{-l/n}[(1-x)^{k/n} - x^{k/n}] + l/n + 2kx/n,$$

dann folgt

$$\frac{d}{dx} \tilde{g}(x) < 0 \text{ für } 0 < x < 1/2$$

und somit

$$g(1/2, \dots, 1/2) < g(a_1, \dots, a_k) = g(a_1, \dots, a_1) < g(0, \dots, 0);$$

d.h., g nimmt in $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_1)$ weder ein absolutes Minimum noch Maximum an.

Somit: Wenn f in dem Randpunkt $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $0 < a_i \leq 1/2$, $i = 1, \dots, n$, einen absoluten Extremwert besitzt, dann handelt es sich dabei um ein Minimum und es gilt $a_1 = \cdots = a_n = 1/2$.

2. Fall: l Komponenten von a sind gleich 0 ($l \geq 1$).

Ohne Einschränkung sei

$$a_{k+1} = \cdots = a_n = 0, \quad k = n - l.$$

Wir definieren:

$$h : [0, 1/2]^k \to \mathbb{R}$$

$$h(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} (1 - x_i)^{1/n} + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Dann folgt für $1 \leq j \leq k$:

$$h_{x_j}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{n} [-(1 - x_j)^{-1} (G_k')^{k/n} + 2] > 0.$$

Also nimmt die Funktion h genau in $(0, \dots, 0)$ bzw. $(1/2, \dots, 1/2)$ ihr absolutes Minimum bzw. Maximum an.

Wenn f in $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ das absolute Minimum annimmt, dann erhalten wir für alle $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1/2]^n$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\geq f(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0) \\ &= h(a_1, \dots, a_k) \\ &\geq h(0, \dots, 0) \\ &= 1; \end{aligned}$$

und wenn $f(a_1, \dots, a_n) = 1$, dann gilt $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so folgt: f nimmt das absolute Minimum genau in den Punkten $(a_1, \dots, a_1)$ mit $0 \leq a_1 \leq 1/2$ an.

Wenn f im Punkte $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ das absolute Maximum annimmt, dann folgt $k \geq 1$ und wir erhalten für alle $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1/2]^n$:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\leq f(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0) \\ &= h(a_1, \dots, a_k) \\ &\leq h(1/2, \dots, 1/2) \\ &= 2^{-k/n} + k/n. \end{aligned}$$

Auf Grund von

$$2^{-k/n}+k/n\leq 2^{(1-n)/n}+(n-1)/n, \quad 1\leq k\leq n-1,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle $k=n-1$ steht, erhalten wir:

$$f(x_1,\dots,x_n)\leq 2^{(1-n)/n}+(n-1)/n=f(0,1/2,\dots,1/2).$$

Also nimmt f das Maximum im Punkte $a=(a_1,\dots,a_n)$ dann und nur dann an, wenn genau einer der Zahlen $a_1,\dots,a_n$ gleich 0 ist und alle anderen Zahlen gleich 1/2 sind. □

BEMERKUNG. Die Ungleichung von Ky Fan läßt sich leicht aus den beiden Abschätzungen (1.2) und (1.5) herleiten:

Für alle $x_i\in[0,1/2]$, $i=1,\dots,n$, folgt aus

$$G_n'-G_n\geq A_n'-A_n\geq 0 \text{ und } 1/G_n'\geq 1/A_n'$$

die Ungleichung

$$(G_n'-G_n)/G_n'\geq(A_n'-A_n)/A_n' \text{ oder } G_n/G_n'\leq A_n/A_n',$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1=\cdots=x_n$.

Herrn Professor Dr. R. Tijdeman und dem Gutachter dieser Arbeit möchte ich für wertvolle Ergänzungen und Verbesserungsvorschläge sehr herzlich danken.

LITERATUR

1. Alzer, H. – On an inequality of Ky Fan. J. Math. Anal. Appl. (erscheint demnächst).
2. Alzer, H. – Verschärfung einer Ungleichung von Ky Fan. Aequat. Math. (erscheint demnächst).
3. Alzer, H. – A new proof of Ky Fan's inequality. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. (erscheint demnächst).
4. Beckenbach, E.F. and R. Bellman – Inequalities. Springer Verlag, Berlin, 1961.
5. Bullen, P.S., – An inequality of N. Levinson. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **412–460**, 109–112 (1973).
6. El-Neweihi, E. and F. Proschan – Unified treatment of inequalities of the Weierstrass product type. Amer. Math. Monthly **86**, 206–208 (1979).
7. Flanders, H. – Less than or equal to an exercise. Amer. Math. Monthly **86**, 583–584 (1979).
8. Hardy, G.H., J.E. Littlewood and G. Pólya – Inequalities. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
9. Klamkin, M.S. – Extensions of the Weierstrass product inequalities II. Amer. Math. Monthly **82**, 741–742 (1975).
10. Klamkin, M.S. and D.J. Newman – Extensions of the Weierstrass product inequalities. Math. Mag. **43**, 137–140 (1970).
11. Levinson, N. – Generalization of an inequality of Ky Fan. J. Math. Anal. Appl. **8**, 133–134 (1964).
12. Marshall, A.W. and I. Olkin – Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. Academic Press, New York, 1979.
13. Mitrinović, D.S. – Analytic Inequalities. Springer Verlag, New York, 1970.
14. Popoviciu, T. – Sur une inégalité de N. Levinson. Mathematica (Cluj) **6**, 301–306 (1964).

15. Wang, C.-L. – On a Ky Fan inequality of the complementary A-G type and its variants. J. Math. Anal. Appl. **73**, 501–505 (1980).
16. Wang, C.-L. – Functional equation approach to inequalities II. J. Math. Anal. Appl. **78**, 522–530 (1980).
17. Wang, C.-L. – Inequalities of the Rado-Popoviciu type for functions and their applications. J. Math. Anal. Appl. **100**, 436–446 (1984).
18. Wang, W.-L. and P.-F. Wang – A class of inequalities for the symmetric functions. (Chinese). Acta Math. Sinica **27**, 485–497 (1984).